GRUP – DUAL DARI SUATU GRUP–

Y.D. Sumanto
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. H. Soedarto, S. H, Tembalang, Semarang

Abstract. On Γ − semigroup, every element of Γ can be considered as binary operation on . If there are Γ such that (,) is a group, then for any Γ, (,β) is also a group and S called as Γ − group. Otherwise for every element of can be considered as binary operation on Γ. There are Γ such that is Γ- group and every (Γ,)is a group, troughout in this paper Γ is called as dual group from .

Keywords : Γ −group , Γ −semigroup, dual Γ − group.

1. PENDAHULUAN

Konsep semigrup–Γ telah dikenalkan oleh M.K. Sen [5] di tahun 1981.Penelitianpadasemigrup–Γ selama ini membahas tentang sifat-sifat elemen , himpunan bagian , relasi pada maupun pemetaan pada . Seperti yang dikerjakan oleh M.K. Saha [4] tentang idempotent maksimum pada semigrup –Γ, Y.I. Kwon [3] tentang regular kiripada − Γ −semigrup, N. Chinram [2] tentangrelasi queen pada semigrup–Γ, N. Chinram [1] tentang teorema isomorphism pada semigrup–Γ. Dalam tulisan ini dibahas tentang elemen-elemen dari Γ dan ditunjukkan terdapat Γ sedemikian hingga merupakan grup –Γ dan untuk setiap , berperan sebagai operasi biner pada Γ dan (Γ,) grup.

Adapun semigrup–Γ diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 1.1 [5] *Diberikan dua himpunan tak kosong dan , (,) disebut semigrup – jika terdapat pemetaan*

$$\times \quad \times \quad \rightarrow$$

dengan definisi

$$(\ , \ , \ )$$

untuk setiap , dan yang memenuhi sifat untuk setiap , , , ,

$$(\quad) \quad = \quad (\quad)$$

Dari Definisi 1.1 menunjukkan bahwa untuk setiap Γ dapat dipandang sebagai operasi biner pada dan (,) berupa semigrup. Lebih lanjut teorema berikut menunjukkan bahwa untuk setiap , Γdan , merupakan operasi biner pada .

Teorema 1.2 *Jika (,) merupakan semigrup – maka untuk setiap , dan mendefinisikan operasi biner pada , yaitu*

$$: \ \times \ \rightarrow$$

dengan definisi untuk setiap(,) ×

$$(\ , \ ) \quad (\quad) \ =(\quad)$$
$$= \ (\quad)$$

Bukti:

Diberikan semigrup–Γ . Diambil sebarang , Γ dan didefinisikan pemetaan

$$: \ \times \ \rightarrow$$

dengan definisi

$$(\ , \ ) \quad (\quad) \ =(\quad)$$
$$= \ (\quad)$$

untuk setiap (,) × . Karena semigrup –Γ, maka untuk setiap ,

$$(\quad) \ = (\quad) \ = \ (\quad)$$

Ini menunjukkan bahwa merupakan operasi-operasi pada .

Dalam tulisan ini akan ditunjukkan bahwa

1. Jika semigrup –Γ dan terdapat Γ dimana (,) berupa grup, maka untuk setiap Γ, (,) juga grup. Selanjutnya disebut grup–Γ.
2. Jika Ω = himpunan semua operasi biner asosiatif pada himpunan , akan ditunjukkan terdapat Γ Ω diman untuk setiap Γ, (,) berupa grup yang memenuhi untuk setiap , Γdan , Γ, lebih dari itu akan ditunjukkan untuk setiap , (Γ,) berupa grup.

2. GRUP –

Pada bagian ini akan ditunjukkan jika semigrup –Γ dimana terdapat terdapat Γ sedemikian hingga (,) berupa grup, maka untuk setiap Γ, (,) juga grup. Namun sebelumnya akan didefinisikan kesamaan operasi biner pada himpunan .

Definisi 2.1 *Diberikan himpunan tak kosong , operasi biner dan pada himpunan dikatakan sama jika untuk setiap ,*

=

Dalam teorema berikut akan ditunjukkan jika (,Γ) semigrup–Γ dimana terdapat Γ sedemikian hingga (,) berupa grup, maka setiap elemen dari Γ dapat dibangkitkan oleh .

Teorema 2.2 *Jika* (,) *merupakan semigrup– dimana terdapat sedemikian hingga* (,) *grup, maka untuk setiap terdapat sedemikian hingga* = .

Bukti :
Misalkan (,Γ) semigrup–Γ dan Γ, (,) berupa grup dengan elemen identitas . Diambil sebarang Γ dan pilih = . Menurut Teorema 1.2 untuk setiap , memenuhi

( ) =( )
= ( )
=(( ))
=( )
= ( )
=

dengan kesamaaan dua operasi biner, maka

=

Dengan = .

Definisi 2.3 *Semigrup–* (,) *disebut grup– jika untuk setiap* , (,) *berupa grup.*

Jika terdapat Γ sedemikian hingga (,) berupa grup, teorema berikut menunjukkan untuk setiap Γ, (,) berupa grup.

Teorema 2.4 *Jika*(,) *semigrup– dan ada sedemikian hingga* (,) *grup, maka untuk setiap* , (,) *juga grup.*

Bukti :
Misalkan(,Γ) semigrup–Γ dan (,) grup untuk suatu Γ dengan sebagai elemen identitas dan invers dari ditulisdengan . Diambil sebarang Γ, karena (,) semigrup, maka untuk menunjukkan (,) grup tinggal menunjukkan (,) mempunyai elemen identitas dan setiap elemen mempunyai invers.

i. Dari Teorema 2.2 untuk Γ tersebut terdapat = sehingga = . Akan ditunjukkan bahwa = ( ) merupakan elemen identitas terhadap . Diambil sebarang

= ( )
= ( ) ( )
= (( ))
= (( ) ( ))
=
=

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan = . Jadi elemen identitas (,).

ii. Diambil sebarang . Akan ditunjukkan bahwa

=( )

invers terhadap , selanjutnya

=
= ( )
= ( )
= ( )
=
=
= ( )
=
=

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan

=

Jadi = ( ) merupakan invers terhadap .

Teorema 2.4 menunjukkan jika (,) semigrup–Γ dan terdapat sehingga (,) grup, maka setiap elemen dari dapat dibangkitkan oleh .

Contoh 2.5 Diberikan himpunan S = {a, b, c} dan Γ = {α, β, γ} dimana α, β dan γ sebagai operasi biner pada S yang didefinisikan dalam tabel berikut

α	a		c
a	a	B	c
b	b	c	A
c	c	a	B

β	a	b	C
a	c	a	B
b	a	b	C
c	b	c	A

γ	a	b	C
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Dapat ditunjukkan bahwa S merupakan semigrup–Γ. Dapat dilihat (S, α) adalah grup, begitu juga (S, β) dan (S, γ) juga grup, Dan dapat ditunjukkan β = αcα dan γ = αbα.

Dari Teorema 2.4, semigrup–Γ(S, Γ) jika terdapat α Γ sehingga (S, α) grup, maka (S, Γ) merupakan grup–Γ.

3. GRUP– DUAL DARI GRUP–

Misalkan S himpunan tak kosong dan Ω=himpunan semua operasi biner asosiatif pada S. Pada bagian ini akan ditunjukkan terdapat Γ Ω sedemikian hingga (S, Γ) semigrup–Γ yang memenuhi untuk setiap α, β Γ dan a S, αaβ Γ. Hal ini sesuai dengan Teorema 2.1 untuk setiap a S dapat dipandang sebagai operasi biner pada Γ. Selanjutnya akan ditunjukkan jika (S, Γ) grup–Γ maka untuk setiap a S, (Γ, a) berupa grup yang selanjutnya disebut grup–Γ dual.

Definisi 3.1 *Diberikan himpunan tak kosong dan = himpunan semua operasi biner asosiatif pada . Himpunan disebut gamma maksimal dari* ( ) *jika* (,) *semigrup– dimana untuk setiap – terdapat dan terdapat , , , sehingga*

( ) ≠ ( )

dan

( ) ≠ ( )

Sesuai Teorema 1.2, teorema berikut menunjukkan bahwa jika Γ adalah gamma maksimal dari , maka untuk setiap elemen dapat dipandang sebagai operasi biner pada Γ.

Teorema 3.2 *Jika adalah gamma maksimal dari , maka untuk setiap , dan , .*

Bukti :

Diberikan himpunan tak kosong dan Ω =himpunan semua operasi biner asosiatif pada . Jika Γ Ω gamma maksimal dari , maka(, Γ) berupa semigrup–Γ dan untuk setiap Ω– Γ terdapat Γ dan terdapat , , sehingga

( ) ≠ ( )

dan

( ) ≠ ( ).

Diambil sebarang , Γ dan . Andaikan Γ. Karena Γ gamma maksimal, makaterdapat Γ dan terdapat , , sehingga

( )( ) ≠ (( ))

Ini berarti bahwa

( ) ( ) ≠ ( )

Kontradiksi dengan kenyataan bahwa adalah semigrup–Γ sedangkan , , , dan , , Γ.

Teorema berikut merupakan tujuan utama dari tulisan ini, yaitu jika Γ gamma maksimal dan (, Γ) merupakan grup–Γ, maka untuk setiap , (Γ,) merupakan grup yang selanjutnya (Γ, S) disebut grup–Γ dual (*dual −group)*darigrup–Γ(, Γ).

Teorema 3.3 *Diberikan himpunan tak kosong , jika adalah gamma maksimal dan* (,) *merupakan grup– , maka untuk setiap , (,) merupakan grup. Selanjutnya (,) disebut grup– dual dari grup– (,).*

Bukti :
Misalkan Γ gamma maksimal dari dan (,Γ) berupa grup–Γ. Teorema 3.2 menunjukkan bahwa untuk setiap merupakan operasi biner pada Γ. Misalkan Γ(,) grup dengan elemen identitas .
Diambilsebarang

i. Dari Teorema 3.2, maka merupakan operasi biner pada Γ.
ii. Diambil sebarang , , Γ dan , . Karena (,Γ) semigrup–Γ, maka memenuhi
( ) = ( )( )
= ( )
= (( ))
= ( )
Karena , sebarang elemen , maka
( ) = ( )
Jadi bersifat asosiatif di dalam Γ.
iii. Akan ditunjukkan bahwa
= Γ merupakan elemen identitas dari . Diambil sebarang Γdan , , maka
( ) = ( )
= (( ))
= ( )
= ( )
=
Karena , sebarang elemen , maka
=
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa
=
Jadi = Γ merupakan elemen identitas di dalam Γ.
iv. Diambil sebarang Γ, akan ditunjukkan bahwa
= ( )
merupakan invers terhadap . Diambil sebarang ,
( ) = ( )
= (( ))
= ( ) (( ))
= ( ) ( )
=
=
=
dengan = . Karena berlaku untuk setiap , , maka
=
Jadi invers terdapat adalah
= ( )
Dari i, ii, iii, dan iv diperoleh bahwa (Γ,) merupakan grup untuk sebarang .

Contoh 3.4 Diberikan = { , , } dan Γ = {α, β, γ} seperti yang didefinisikan pada Contoh 2.5, maka (,Γ) merupakan grup–Γ .Dalam hal ini Γ merupakan gamma maksimal.Selanjutnya setiap elemen dari dapat dipandang sebagai operasi biner pada Γ disajikan oleh tabel berikut

Ini menunjukkan bahwa (Γ, S) merupakan grup–Γ dual dari grup–Γ(,Γ).

4. KESIMPULAN

Dari hasil di depan diperoleh kesimpulan bahwa jika himpunan tak kosong, maka terdapat Γ himpunan operasi biner pada sedemikian hingga untuk setiap Γ(,) berupa grup dan elemen-elemen dari dapat dipandang sebagai operasi biner padaΓ sedemikian hingga untuk setiap ,(Γ,) grup. Dalam hal ini Γ yang dimaksud adalah gamma maksimal.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Chinram, R., P. Siammai, (2008), *On Green's Relations for* Γ*-semigroups andReductive* Γ*-semigroups*. International Jurnal of Algebra 2 : 187-195.

[2]. Chinram, R., K. Tinpun, (2009), *Isomorphism Theorems for* Γ*-semigroups andOrdered* Γ*-semigroups*. Thai Journal of Mathematics 7: 231-241.

[3]. Kwon, Y. I., S. K. Lee, (1998). *On The Left Regular po-* Γ*-semigroups*. Kangweon-Kyungki Mathematical Journal 6 : 149-154.

[4]. Saha, N. K., (1994), *The Maximum Idempotent-Separating Congruence On an inverse* Γ*-semigroups*. Kyungpook Mathematical Journal 34 : 59-66.

[5]. Sen, M. K. (1981), *On* Γ*-semigroups*, Procedding of International Conference onAlgebra and its Applications, Dekker Publication, New York, 301.